جلد ۱، شماره ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۰) صص ۶۸-۴۰
شناسه DOI: 10.22067/tmsj.2021.68541.1005
https://tmsj.um.ac.ir
مقاله علمی-ترویجی

# نامساوی‌های ابرانقباضی و سوبولف لگاریتمی

سلمان ابوالفتح بیگی

پژوهشکده ریاضیات، پژوهشگاه دانشهای بنیادی

salman@ipm.ir

چکیده. نامساوی‌های ابرانقباضی و سوبولف لگاریتمی ابزارهای مهمی در ریاضیات هستند که کاربردهای زیادی در آنالیز، نظریه احتمالات، هندسه، علوم کامپیوتر و نظریه اطلاعات پیدا کرده‌اند. در این مقاله، مفاهیم و قضایای اولیه این نظریه بیان شده و به کاربردهایی از آن اشاره می‌شود.

## ۰. پیش‌گفتار

هر ماتریس تصادفی[۱] $T$ یک نگاشت انقباضی[۲] تحت نرم $L_p$ است، یعنی $\|T\|_{p\to p} \leq 1$ به ازای هر $1 \leq p \leq \infty$. این خاصیت نتیجه ساده‌ای از محدب بودن تابع $x \mapsto x^p$ است. بعضی از ماتریس‌های تصادفی در نامساوی قوی‌تری صدق می‌کنند:

$$\|Tf\|_p \leq \|f\|_q, \qquad \forall f, \tag{۰.۱}$$

2020 Mathematics Subject Classification. 47D07, 60J25, 37A25, 39B62.

**کلید واژگان.** نامساوی ابرانقباضی، نامساوی سوبولف لگاریتمی، نیم‌گروه مارکوف، زمان آمیختگی.

تاریخ: دریافت ۹۹/۱۱/۶ پذیرش ۰۰/۲/۳۰.

[۱] Stochastic matrix

[۲] Contraction

برای $1 \leq q < p \leq \infty$. این نامساوی به این دلیل قوی‌تر است که تابع $q \mapsto \|f\|_q$ نانزولی است. در نتیجه نامساوی (۱.۱) گزاره قوی‌تری از انقباضی بودن $T$ را بیان می‌کند و به این دلیل به آن نامساوی ابرانقباضی[۳] گویند. اثبات نامساوی‌های ابرانقباضی معمولاً کار دشواری است. با این حال وقتی $T$ متعلق به یک نیم‌گروه پیوسته از ماتریسهای تصادفی[۴] باشد، نامساوی‌های ابرانقباضی را می‌توان با استفاده از دسته دیگری از نامساوی‌ها به نام نامساوی‌های سوبولف لگاریتمی[۵] اثبات کرد.

نامساوی‌های ابرانقباضی ابتدا در مطالعه نظریه میدان‌های کوانتمی ظاهر شدند. سپس نامساوی‌های سوبولف لگاریتمی و ارتباط آنها با نامساوی‌های ابرانقباضی مورد توجه قرار گرفتند. برای اطلاع در مورد تاریخچه این مطالب به [۳] ارجاع می‌دهیم. در سال‌های اخیر این نامساوی‌ها کاربردهای زیادی در شاخه‌های مختلف ریاضی پیدا کردند. از جمله این کاربردها می‌توان به تقریب زمان آمیختگی[۶] ، اثبات نامساوی‌های تجمع اندازه[۷] ، مسأله هزینه ترابری[۸] ، نابرابری‌های هم‌محیطی[۹] و آنالیز توابع بولی اشاره کرد. هدف از این مقاله ارائه مقدماتی از نظریه نامساوی‌های ابرانقباضی و سوبولف لگاریتمی، و اشاره به بعضی از کاربردهای آنها است.

## ۲. نیم‌گروه‌های مارکوف

فرض کنید $(\Omega, \Sigma, \pi)$ یک فضای احتمال باشد. برای سادگی در ابتدا فرض می‌کنیم $\Omega$ یک مجموعه متناهی با حداقل دو عضو باشد. همچنین فرض می‌کنیم $\pi(x) \neq 0$ برای هر $x \in \Omega$. مجموعه $L^2(\pi)$ را فضای خطی توابع حقیقی $f : \Omega \to \mathbb{R}$ همراه با ضرب داخلی

$$\langle f, g\rangle_\pi = \mathbb{E}[fg], \tag{۱.۲}$$

بگیرید که در آن امید ریاضی نسبت به توزیع احتمال $\pi$ است. این ضرب داخلی یک نرم روی این فضا القاء می‌کند:

$$\|f\|_2 = (\mathbb{E}f^2)^{1/2}.$$

ما در اینجا هر عدد حقیقی $c \in \mathbb{R}$ را نیز به عنوان یک تابع (تابع ثابت) عضو $L^2(\pi)$ می‌گیریم. به طور خاص $1$ را به عنوان تابع ثابتی می‌گیریم که در هر نقطه $x$ برابر $1$ است. واریانس یک تابع $f \in L^2(\pi)$ برابر است

---

[۳] Hypercontractivity inequality

[۴] Continuous semigroup of stochastic matrices

[۵] Logarithmic-Sobolev inequalities

[۶] Mixing time

[۷] Concentration of measure

[۸] Transportation cost problem

[۹] Isoperimetric inequalities

با

$$\mathrm{Var} f = \mathbb{E}[f^2] - \mathbb{E}[f]^2.$$

**تعریف ۱.۲.** مجموعه $\{T_t : t \geq 0\}$ از نگاشت‌های خطی $T_t : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ یک نیم‌گروه مارکوف[۱۰] خوانده می‌شود اگر خواص زیر برقرار باشند:

- (نیم‌گروه) $T_0 = I$ نگاشت همانی باشد و به ازای هر $s, t \geq 0$ داشته باشیم

$$T_s T_t = T_{s+t},$$

- (پیوستگی) تابع $t \mapsto T_t$ نگاشتی پیوسته باشد به این معنی که برای هر تابع $f \in L^2(\pi)$ و هر $x \in \Omega$ داشته باشیم:

$$\lim_{t \to 0^+} T_t f(x) = f(x),$$

- (نگاشت تصادفی) برای هر $t \geq 0$ نگاشت $T_t$ یک نگاشت تصادفی باشد یعنی

$$T_t 1 = 1 \qquad \text{(نرمال‌سازی)}$$

$$T_t f \geq 0 \qquad \forall f \geq 0, \qquad \text{(مثبت بودن)}$$

که منظور از $f \geq 0$ این است که $f(x) \geq 0$ برای هر $x \in \Omega$.

توجه کنید که طبق خاصیت نرمال‌سازی، عدد $1$ مقدار ویژه مشترک همه نگاشت‌های $T_t$ است. به علاوه، با استفاده از از خاصیت مثبت بودن می‌توان نشان داد که $1$ بزرگترین مقدار ویژه $T_t$ است. به طور مشابه می‌توان نشان داد که نگاشت‌های $T_t$ به طور یکنواخت کراندار هستند.

طبق تعریف، $T_t$ روی فضای توابع عمل می‌کند. لذا ترانهاده آن روی فضای توزیع‌ها عمل می‌کند. در واقع اگر $\mu$ یک توزیع احتمال دلخواه روی $\Omega$ باشد، آنگاه

$$\tau = \mu T_t,$$

نیز یک توزیع احتمال است. در اینجا ما توزیع‌های احتمال را به عنوان بردارهای سطری در نظر می‌گیریم. توجه کنید که $\tau = \mu T_t$ یک توزیع احتمال است زیرا با استفاده از خاصیت مثبت بودن به ازای هر $f \geq 0$ داریم $\mathbb{E}_\tau[f] = \tau(f) = \mu(T_t f) \geq 0$ ، و با استفاده از خاصیت نرمال‌سازی داریم $\tau(1) = \mu(T_t 1) = \mu(1) = 1$ .

---

[۱۰] Markov semigroup

**عملگر لیندبلاد.** عملگر یا مولد لیندبلاد[۱۱] متناظر با نیم‌گروه مارکوف $\{T_t : t \geq 0\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L} := -\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(T_t - I).$$

برای خوش‌تعریفی این عملگر باید نشان دهیم که حد فوق وجود دارد. برای این کار با استفاده از خاصیت پیوستگی، برای $\epsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک داریم

$$\Big\| I - \frac{1}{\epsilon}\int_0^{\epsilon} T_s \mathrm{d}s \Big\| < 1,$$

که در اینجا منظور از $\|\cdot\|$ نرم عملگری است. در نتیجه $\int_0^\epsilon T_s\mathrm{d}s$ و $\epsilon^{-1}\int_0^\epsilon T_s\mathrm{d}s$ وارون‌پذیر هستند. حال برای $0 < t < \epsilon$ داریم

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}(T_t - I)\int_0^{\epsilon} T_s\mathrm{d}s &= \frac{1}{t}\Big(\int_0^{\epsilon} T_{s+t}\mathrm{d}s - \int_0^{\epsilon} T_s\mathrm{d}s\Big)\\ &= \frac{1}{t}\Big(\int_t^{t+\epsilon} T_s\mathrm{d}s - \int_0^{\epsilon} T_s\mathrm{d}s\Big)\\ &= \frac{1}{t}\Big(\int_\epsilon^{t+\epsilon} T_s\mathrm{d}s - \int_0^{t} T_s\mathrm{d}s\Big).\end{aligned}$$

سپس با ضرب کردن هر دو طرف در وارون $\int_0^\epsilon T_s\mathrm{d}s$ داریم

$$\frac{1}{t}(T_t - I) = \frac{1}{t}\Big(\int_\epsilon^{t+\epsilon} T_s\mathrm{d}s - \int_0^{t} T_s\mathrm{d}s\Big)\cdot\Big(\int_0^{\epsilon} T_s\mathrm{d}s\Big)^{-1}.$$

لذا با استفاده از خاصیت پیوستگی

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}(T_t - I) = (T_\epsilon - I)\Big(\int_0^{\epsilon} T_s\mathrm{d}s\Big)^{-1}.$$

در نتیجه حد مورد نظر وجود دارد و برابر است با

$$\mathcal{L} = -(T_\epsilon - I)\Big(\int_0^{\epsilon} T_s\mathrm{d}s\Big)^{-1}.$$

توجه کنید که با استفاده از خاصیت نیم‌گروهی می‌توان نشان داد که برای هر $t \geq 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_t = -\mathcal{L}T_t = -T_t\mathcal{L}.$$

در نتیجه

$$T_t = e^{-t\mathcal{L}}.$$

---

[۱۱] Lindblad generator

به علاوه با استفاده از خاصیت نرمال‌سازی داریم

$$\mathcal{L}1 = 0.$$

**برگشت‌پذیری.** در این مقاله فرض می‌کنیم $\mathcal{L}$ به عنوان عملگری روی $L^2(\pi)$ خودالحاق است، یعنی برای هر $f, g \in L^2(\pi)$ داریم

$$\langle f, \mathcal{L}g \rangle_\pi = \langle \mathcal{L}f, g \rangle_\pi,$$

که در آن ضرب داخلی در (۱.۲) تعریف شده است. توجه کنید که چون $T_t = e^{-t\mathcal{L}}$، عملگر $T_t$ نیز خودالحاق است و داریم

$$\langle f, T_t g \rangle_\pi = \langle T_t f, g \rangle_\pi.$$

به طور خاص اگر $f, g$ را توابع مشخصه مجموعه‌های $\{x\}, \{y\} \subseteq \Omega$ در نظر بگیریم، آنگاه رابطه بالا نتیجه می‌دهد

$$\pi(x) T_t(x, y) = \pi(y) T_t(y, x), \tag{۲.۲}$$

که در آن منظور از $T_t(x, y)$ درایه $(x, y)$ ماتریس $T_t$ است. به این تساوی خاصیت برگشت‌پذیری نیم‌گروه مارکوف گفته می‌شود. توجه کنید که طبق خاصیت برگشت‌پذیری، توزیع احتمال $\pi$ تحت $T_t$ ماناست[۱۲]، یعنی $\pi T_t = \pi$. برای اثبات این ادعا داریم

$$\pi T_t(y) = \sum_x \pi(x) T_t(x, y) = \sum_x \pi(y) T_t(y, x) = \pi(y),$$

که در تساوی آخر از $T_t 1 = 1$ استفاده کردیم. به عنوان نتیجه دیگری از خاصیت برگشت‌پذیری می‌توان نشان داد که $T_t$ امید ریاضی نسبت به $\pi$ را تغییر نمی‌دهد، یعنی برای هر تابع $f$ داریم

$$\mathbb{E}[T_t f] = \langle 1, T_t f \rangle_\pi = \langle T_t 1, f \rangle_\pi = \langle 1, f \rangle_\pi = \mathbb{E} f.$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد $\mathbb{E}[\mathcal{L} f] = 0$ .

[۱۲] Stationary

نتیجه دیگری که در ادامه استفاده خواهد شد به شرح زیر است. فرض کنید $\mu$ توزیع احتمال دلخواهی روی $\Omega$ باشد و قرار دهید $f(x) = \mu(x)/\pi(x)$. همچنین قرار دهید $\tau = \mu T_t$ و $g = \tau/\pi$ . در این صورت

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\tau(x)}{\pi(x)} \\ &= \sum_y \frac{\mu(y)T_t(y,x)}{\pi(x)} \\ &= \sum_y \frac{\mu(y)T_t(x,y)}{\pi(y)} \\ &= T_t f(x), \end{aligned}$$

که در خط سوم از خاصیت برگشت‌پذیری (۲.۲) استفاده کردیم. به طور خلاصه داریم

$$\frac{\mu T_t}{\pi} = T_t\Big(\frac{\mu}{\pi}\Big). \tag{۳.۲}$$

**فرم دیریشله.** فرم دیریشله[۱۳] متناظر با یک نیم‌گروه مارکوف روی فضای توابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{E}(f,g) := \langle f, \mathcal{L}g\rangle_\pi = \mathbb{E}[f\mathcal{L}g] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle f, T_t g\rangle_\pi\Big|_{t=0}.$$

ادعا می‌کنیم که فرم دیریشله مثبت است، یعنی به ازای هر تابع $f$

$$\mathcal{E}(f,f) \geq 0.$$

برای اثبات این ادعا فرض کنید $r < 0$ و تعریف کنید

$$\hat{T}_t = e^{t(rI-\mathcal{L})} = e^{rt}T_t.$$

در نتیجه

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{T}_t = (rI-\mathcal{L})\hat{T}_t,$$

و

$$(rI-\mathcal{L})\int_0^t \hat{T}_s \mathrm{d}s = \hat{T}_t - I.$$

از طرف دیگر چون $r < 0$ و $T_t$ کراندار است، داریم $\lim_{t\to\infty} \hat{T}_t = 0$. بنابراین

$$(rI-\mathcal{L})\int_0^\infty \hat{T}_s \mathrm{d}s = -I,$$

و $rI - \mathcal{L}$ وارون‌پذیر است. در نتیجه $r$ مقدار ویژه $\mathcal{L}$ نیست. در واقع همه مقادیر ویژه $\mathcal{L}$ نامنفی هستند. لذا از آنجا که $\mathcal{L}$ خودالحاق است، فرم دیریشله که فرم دوخطی متناظر با آن است، مثبت است.

[۱۳] Dirichlet form

**شکاف طیفی.** دیدیم که $\mathcal{L}$ عملگری مثبت نیمه‌معین و دارای یک مقدار ویژه صفر است، زیرا $\mathcal{L}1=0$. در این مقاله فرض می‌کنیم که بردار $1$ تنها بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه صفر $\mathcal{L}$ است ، یعنی تکرر این مقدار ویژه یک است. به این خاصیت، اولیه بودن[۱۴] نیم‌گروه مارکوف گفته می‌شود. با این فرض، کوچکترین مقدار ویژه ناصفر $\mathcal{L}$ شکاف طیفی[۱۵] نامیده و با $\lambda$ نمایش داده می‌شود. با توجه به خودالحاق بودن $\mathcal{L}$ و اینکه فضای عمود به بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه صفر برابر $\{f:\langle f,1\rangle_\pi=\mathbb{E}f=0\}$ است، داریم

$$\lambda=\inf_{\mathbb{E}[f]=0}\frac{\mathcal{E}(f,f)}{\mathbb{E}[f^2]}. \tag{۴.۲}$$

همچنین می‌توان نشان داد

$$\lambda=\inf_{f\neq 0}\frac{\mathcal{E}(f,f)}{\mathrm{Var} f}.$$

**گزاره ۲.۲.** *به ازای هر* $t>0$ *و هر تابع* $f$ *داریم*

$$\|T_tf-\mathbb{E}f\|_2\leq e^{-\lambda t}\|f-\mathbb{E}f\|_2. \tag{۵.۲}$$

*برهان.* طبق تعریف شکاف طیفی داریم

$$\mathrm{Var} f=\|f-\mathbb{E}f\|_2^2\leq\frac{1}{\lambda}\mathcal{E}(f,f).$$

به این نامساوی، نامساوی پوانکاره[۱۶] گویند. با استفاده از این نامساوی داریم

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|T_tf-\mathbb{E}f\|_2^2&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle T_tf-\mathbb{E}f,T_tf-\mathbb{E}f\rangle\\&=-2\mathcal{E}(T_tf,T_tf)\\&\leq-2\lambda\|T_tf-\mathbb{E}f\|_2^2.\end{aligned}$$

حال قرار دهید $\varphi(t)=\|T_tf-\mathbb{E}f\|_2^2$. طبق نامساوی فوق $\varphi'(t)\leq-2\lambda\varphi(t)$ یا به طور معادل

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\varphi(t)\leq-2\lambda.$$

با محاسبه انتگرال دو طرف این نامساوی داریم

$$\ln\phi(s)-\ln\phi(0)=\int_0^s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\phi(t)\mathrm{d}t\leq\int_0^s(-2\lambda)\mathrm{d}t=-2\lambda s.$$

---

[۱۴] Primitivity

[۱۵] Spectral gap

[۱۶] Poincaré inequality

به طور معادل داریم

$$\phi(s) \le e^{-2\lambda s + \ln \phi(0)} = e^{-2\lambda s}\phi(0) = e^{-2\lambda s}\|f - \mathbb{E}f\|_2^2,$$

که معادل (۵.۲) است.

□

طبق این گزاره، با فرض اولیه بودن $\mathcal{L}$، برای هر $f$، هرگاه $t \to \infty$، تابع $T_t f$ به تابع ثابت $\mathbb{E}f$ میل می‌کند. به طور معادل، با استفاده از (۳.۲) به ازای هر توزیع احتمال $\mu$، توزیع احتمال $\mu T_t$ به توزیع مانای $\pi$ میل می‌کند. به علاوه سرعت این همگرایی نمایی است.

این بخش را با ارائه مثالی ساده، ولی در عین حال مهم از یک نیم‌گروه مارکوف به پایان می‌رسانیم. قرار دهید $\mathcal{L} = I - \mathbb{E}$ که در آن $\mathbb{E}$ امید ریاضی نسبت به توزیع احتمال $\pi$ است. در نتیجه برای هر تابع $f$ داریم

$$\mathcal{L}f = f - \mathbb{E}f.$$

سپس با استفاده از $\mathbb{E}^2 = \mathbb{E}$ داریم

$$T_t f = e^{-t(I-\mathbb{E})}f = e^{-t}e^{t\mathbb{E}}f = e^{-t}(I + (e^t - 1)\mathbb{E})f = e^{-t}f + (1 - e^{-t})\mathbb{E}f.$$

همچنین طبق تعریف داریم

$$\langle f, \mathcal{L}g\rangle_\pi = \langle f, g - \mathbb{E}g\rangle_\pi = \mathbb{E}[f(g - \mathbb{E}g)] = \mathbb{E}[fg] - \mathbb{E}[f]\mathbb{E}[g] = \langle \mathcal{L}f, g\rangle_\pi.$$

بنابراین $\mathcal{L}$ خودالحاق است. به علاوه

$$\mathcal{E}(f, f) = \langle f, \mathcal{L}f\rangle_\pi = \mathbb{E}[f^2] - \mathbb{E}[f]^2 = \mathrm{Var} f \ge 0,$$

یعنی فرم دیریشله مثبت است. در نهایت، از آنجا که $\mathbb{E}$ یک عملگر تصویر با رتبه یک است، تکرر مقدار ویژه صفر $\mathcal{L} = I - \mathbb{E}$ یک است و باقی مقادیر ویژه آن برابر 1 هستند. بنابراین $\lambda = 1$ و $\mathcal{L}$ اولیه است.

## ۳. نامساوی‌های ابرانقباضی

برای هر عدد حقیقی $p \ge 1$ تعریف کنید

$$\|f\|_p = (\mathbb{E}|f|^p)^{1/p},$$

که تعمیمی از تعریف 2−نرم در بخش قبل است. تأکید می‌کنیم که در اینجا امید ریاضی نسبت به توزیع احتمال $\pi$ است. همچنین به ازای $p = \infty$ تعریف می‌کنیم $\|f\|_\infty = \max_x |f(x)|$ که از حد $p \to \infty$ بدست می‌آید. $\|\cdot\|_p$ برای $1 \le p \le \infty$ در نامساوی مثلث صدق می‌کند[۱۷] و در واقع یک نرم است.

[۱۷] نامساوی مینکوفسکی

به ازای هر $1 \leq p \leq \infty$ مزدوج هولدر[۱۸] آن را با $\hat{p}$ نشان می‌دهیم که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\hat{p}} = 1. \tag{۱.۳}$$

طبق نامساوی هولدر داریم

$$\|f\|_p = \max_{g \neq 0} \frac{\langle f, g\rangle_\pi}{\|g\|_{\hat{p}}}.$$

به طور خاص به ازای توابع $f, g$ داریم

$$|\langle f, g\rangle_\pi| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{\hat{p}}.$$

نامساوی هولدر به ازای $p = \hat{p} = 2$ همان نامساوی کوشی-شوارتز است، و در حالت کلی با استفاده از نامساوی یانگ [۱۹] اثبات می‌شود.

**آنتروپی.** آنتروپی تابع نامنفی $f \geq 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Ent}_\pi(f) := \mathbb{E}[f \ln f] - \mathbb{E}f \ln \mathbb{E}f.$$

در این تعریف فرض می‌کنیم $0 \ln(0) = \lim_{t \to 0^+} t \ln t = 0$. توجه کنید که با استفاده از محدب بودن تابع $s \mapsto s \ln s$ داریم $\mathrm{Ent}_\pi(f) \geq 0$. آنتروپی به صورتی که در ادامه می‌آید با معیار واگرایی کولبک-لیبلر[۲۰] مرتبط است. برای دو توزیع احتمال $\mu, \pi$ تعریف کنید

$$D(\mu\|\pi) = \sum_x \mu(x)\big(\ln \mu(x) - \ln \pi(x)\big). \tag{۲.۳}$$

حال با محاسبه‌ای ساده درمی‌یابیم که برای $f = \mu/\pi$

$$\mathrm{Ent}_\pi(f) = D(\mu\|\pi).$$

دلیل اهمیت تابع آنتروپی برای ما ارتباط آن با مشتق $p$-نرم است که در گزاره زیر داده شده است. این گزاره با محاسبه‌ای ساده اثبات می‌شود.

**گزاره ۱.۳.** *به ازای هر تابع $f \geq 0$ داریم*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\|f\|_p = \frac{1}{p^2}\|f\|_p^{1-p}\ \mathrm{Ent}_\pi(f^p).$$

---

[۱۸] Hölder conjugate

[۱۹] Young's inequality

[۲۰] KL-divergence

توجه کنید که با استفاده از نامنفی بودن تابع آنتروپی که در بالا ذکر شد، از این گزاره نتیجه می‌شود که $p \mapsto \|f\|_p$ نانزولی است. این مطلب با استفاده از نامساوی هولدر نیز قابل اثبات است.

**نرم عملگری.** برای $1 \le p, q \le \infty$ نرم $q \to p$ نگاشت $T_t$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|T_t\|_{q\to p} := \sup_{f\neq 0} \frac{\|T_t f\|_p}{\|f\|_q}. \qquad (۳.۳)$$

در واقع $\|T_t\|_{q\to p}$ کوچکترین عدد $c > 0$ است به طوری که

$$\|T_t f\|_p \le c\|f\|_q, \qquad \forall f.$$

توجه کنید که با استفاده از خاصیت مثبت بودن $T_t$ سوپریمم در (۳.۳) را می‌توان به توابع $f > 0$ محدود کرد. برای چنین توابعی با استفاده از محدب بودن $s \mapsto s^q$ می‌توان نشان داد $\|T_t f\|_q^q \le \|f\|_q^q$ . بنابراین

$$\|T_t\|_{q\to q} \le 1 \qquad \forall q \ge 1.$$

در نتیجه $T_t$ یک نگاشت *انقباضی* تحت هر $q$–نرم است. با توجه به این مشاهده می‌گوییم $T_t$ یک نگاشت *ابرانقباضی* است اگر $\|T_t\|_{q\to p} \le 1$ یا به طور معادل

$$\|T_t f\|_p \le \|f\|_q, \qquad \forall f,$$

برای $1 \le q < p \le \infty$. توجه کنید که چون $p \mapsto \|f\|_p$ نانزولی است، این نامساوی قوی‌تر از نامساوی انقباضی $\|T_t\|_{q\to q} \le 1$ است.

اثبات نامساوی‌های ابرانقباضی معمولاً کار بسیار دشواری است. با این حال از آنجا که ما فرض کردیم $T_t$ متعلق به یک نیم‌گروه مارکوف است، می‌توانیم از ابزارهای دیگری برای این کار استفاده کنیم.

**تعریف ۲.۳.** به ازای $q > 1$ می‌گوییم نیم‌گروه مارکوف $\{T_t : t \ge 0\}$ در نامساوی $q$–سوبولف لگاریتمی با ثابت $c > 0$ صدق می‌کند اگر به ازای هر تابع $f > 0$ داشته باشیم

$$c\,\mathrm{Ent}_\pi(f^q) \le \frac{q^2}{4(q-1)}\mathcal{E}(f^{q-1}, f). \qquad (۴.۳)$$

این نامساوی به ازای $q = 1$ (با در نظر گرفتن حد $q \to 1^+$) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c\,\mathrm{Ent}_\pi(f) \le \frac{1}{4}\mathcal{E}(f, \ln f). \qquad (۵.۳)$$

در واقع بهترین ثابت $c > 0$ را که در نامساوی (۵.۳) صدق کند، برابر با $\alpha_1$ است و $\alpha_q$ بهترین ثابتی است که درنامساوی (۴.۳) صدق می کند.

از آنجا که لگاریتم در تعریف تابع آنتروپی ظاهر می‌شود و سمت چپ نامساوی فوق بر حسب آنتروپی است، به آن نامساوی سوبولف لگاریتمی گفته می‌شود.

در نامساوی فوق قرار دهید $f = g^{1/q}$. در این صورت با استفاده از تعریف مزدوج هولدر $\hat{q} = q/(q-1)$، نامساوی $q$-سوبولف لگاریتمی معادل است با

$$c\,\mathrm{Ent}_\pi(g) \le \frac{q\hat{q}}{4}\mathcal{E}(g^{1/\hat{q}}, g^{1/q}), \qquad \forall g > 0. \tag{۶.۳}$$

همچنین ثابت $q$-سوبولف لگاریتمی برابر است با

$$\alpha_q = \inf_g \frac{q\hat{q}\mathcal{E}(g^{1/\hat{q}}, g^{1/q})}{4\,\mathrm{Ent}_\pi(g)}. \tag{۷.۳}$$

با توجه به این تساوی داریم $\alpha_q = \alpha_{\hat{q}}$ .

**قضیه ۳.۳.** (آ) *به ازای هر* $1 \le q \le p \le 2$ *داریم*

$$q\hat{q}\mathcal{E}(g^{1/\check{q}}, g^{1/q}) \ge p\hat{p}\mathcal{E}(g^{1/\hat{p}}, g^{1/p}), \qquad \forall g \ge 0.$$

(ب) *نگاشت* $q \mapsto \alpha_q$ *روی بازه* $[1,2]$ *ناصعودی است. به علاوه* $\alpha_2$ *کوچک‌ترین ثابت سوبولف لگاریتمی است.*

*برهان.* (ب) نتیجه ساده (آ) و تعریف ثابت سوبولف لگاریتمی است. نامساوی (آ) استروک-واروپولوس[۲۱] نامیده می‌شود. برای اثباتی از این نامساوی [۸] را ببینید. در اینجا اثباتی متفاوت ارائه می‌کنیم.

برای هر $t \ge 0$ و $f \ge 0$ قرار دهید

$$h_t(s) = \langle f^{2-s}, T_t f^s \rangle_\pi.$$

توجه کنید که $h_t(s) = h_t(2-s)$ و $h_t$ حول $s = 1$ متقارن است. در نتیجه همه مشتقات از مرتبه فرد $h_t$ در $s = 1$ صفر هستند و داریم

$$h_t(s) = h_t(1) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{(2j)!}(s-1)^{2j},$$

که در آن

$$c_j = \frac{\mathrm{d}^{2j}}{\mathrm{d}s^{2j}} h_t(s)\Big|_{s=1}.$$

طبق تعریف $h_t(s)$ داریم

$$h_t(s) = \sum_{x,y} \pi(x) T_t(x,y) f(x)^2 e^{s \ln(f(y)/f(x))}.$$

---

[۲۱] Stroock-Varopoulos inequality

یعنی $h_t(s)$ برابر با ترکیب خطی توابع نمایی با ضرایب مثبت است. از این بسط نتیجه می‌گیریم به ازای هر $j \geq 1$، $c_j \geq 0$.

حال تعریف کنید

$$\psi_t(s) = \frac{h_t(s) - h_t(0)}{(s-1)^2 - s} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{(2j)!} \Bigg( \sum_{i=1}^{j-1} (s-1)^{2i} \Bigg).$$

از نامنفی بودن $c_j$ها نتیجه می‌گیریم $\psi_t(s)$ روی بازه $[1,\infty)$ نانزولی است. در نتیجه $\lim_{t\to 0^+} \psi_t(s)/t$ روی همان بازه نانزولی است. از طرف دیگر با استفاده از $h_t(0) = \mathbb{E}[f^2] = h_0(s)$ داریم

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} \frac{\psi_t(s)}{t} &= \frac{1}{(s-1)^2 - 1} \lim_{t\to 0^+} \frac{h_t(s) - h_t(0)}{t} \\
&= \frac{1}{(s-1)^2 - 1} \lim_{t\to 0^+} \frac{h_t(s) - h_0(s)}{t} \\
&= \frac{1}{(s-1)^2 - 1} \frac{\partial}{\partial t} h_t(s) \Big|_{t=0} \\
&= -\frac{1}{(s-1)^2 - 1} \big\langle f^{2-s}, \mathcal{L} f^s \big\rangle_\pi .
\end{aligned}$$

بنابراین

$$s \mapsto -\frac{1}{(s-1)^2 - 1} \big\langle f^{2-s}, \mathcal{L} f^s \big\rangle_\pi ,$$

روی بازه $[1,+\infty)$ نانزولی است. نامساوی (آ) با قرار دادن $p = 2/s$، $\hat{p} = 2/(2-s)$ و $f = \sqrt{g}$ بدست می‌آید.

□

حال می‌توانیم نتیجه اصلی این بخش را بیان کنیم.

**قضیه ۴.۳.** *فرض کنید $\mathcal{L}$ مولد یک نیم‌گروه مارکوف برگشت‌پذیر و اولیه باشد.*

(آ) *در این صورت داریم*

$$\|T_t\|_{q\to p} \leq 1, \qquad \forall p,q > 1, \quad \frac{p-1}{q-1} \leq e^{4\alpha_2 t}.$$

(ب) *برعکس اگر برای $q > 1$ داشته باشیم*

$$\|T_t\|_{q\to p} \leq 1, \qquad \forall p > 1, \quad \frac{p-1}{q-1} \leq e^{4ct},$$

*آنگاه* $\alpha_q \geq c$ .

*برهان.* (آ) برای $q>1$ تعریف کنید $t(p)=\frac{1}{4\alpha_2}\ln\frac{p-1}{q-1}$ . همچنین برای $f\geq 0$ تعریف کنید

$$\psi(p)=\|f\|_q-\|T_{t(p)}f\|_p.$$

در این صورت با استفاده از گزاره ۱.۳ داریم

$$\psi'(p)=-\frac{1}{p^2}\mathbb{E}[g_p]^{\frac{1-p}{p}}\Big(\mathrm{Ent}_\pi(g_p)-\frac{p^2}{4\alpha_2(p-1)}\langle g_p^{1/\hat{p}},g_p^{1/p}\rangle_\pi\Big),$$

که در آن $g_p=\big(T_{t(p)}f\big)^p$ . از طرف دیگر طبق قضیه ۳.۳ نامساوی $\alpha_2\geq\alpha_q$ برقرار است و $\psi'(p)\geq 0$.
بنابراین به ازای هر $q\geq p$ داریم

$$\psi(p)\geq\psi(q)=0,$$

و این همان نامساوی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

(ب) اثبات مشابه بخش (آ) است. قرار دهید $t(p)=\frac{1}{4\alpha_2}\ln\frac{p-1}{q-1}$ و

$$\psi(p)=\|f\|_q-\|T_{t(p)}f\|_p.$$

در این صورت طبق فرض $\psi(p)\geq 0$ به ازای هر $p\geq q$ . از طرف دیگر $\psi(q)=0$ . در نتیجه $\psi'(q)\geq 0$
حال محاسبه $\psi'(q)$ نامساوی سوبولف لگاریتمی مورد نظر را نتیجه می‌دهد.

□

بنا به قضیه ۴.۳ برای اثبات نامساوی‌های ابرانقباضی کافی است کران پایینی روی ثابت 2−سوبولف لگاریتمی یعنی $\alpha_2$ بیابیم. در گزاره زیر نشان می‌دهیم شکاف طیفی کران بالایی روی $\alpha_2$ است.

**گزاره ۵.۳.** $\lambda\geq 2\alpha_2$.

*برهان.* فرض کنید $g$ یک تابع دلخواه با $\mathbb{E}g=0$ باشد. در اینصورت به ازای $\epsilon$ در بازه‌ای حول 0، تابع $f_\epsilon=1+\epsilon g$ مثبت است. در نتیجه طبق تعریف $\alpha_2$ داریم

$$\alpha_2\,\mathrm{Ent}_\pi(f_\epsilon^2)\leq\mathcal{E}(f_\epsilon,f_\epsilon).$$

بنابراین $\psi(\epsilon)=\mathcal{E}(f_\epsilon,f_\epsilon)-\alpha_2\,\mathrm{Ent}(f_\epsilon^2)\geq 0.$ از طرف دیگر محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد

$$\psi(\epsilon)=\epsilon^2\big(\mathcal{E}(g,g)-2\alpha_2\mathbb{E}[g^2]\big)+O(\epsilon^3).$$

بنابراین $2\alpha_2\mathbb{E}g^2\leq\mathcal{E}(g,g)$. در نتیجه با مقایسه با (۴.۲) کران مورد نظر روی $\alpha_2$ بدست می‌آید. □

دیدیم که $\alpha_2$ برای اثبات نامساوی‌های ابرانقباضی به‌کار می‌آید. ثابت $\alpha_1$ نیز پارامتر مهمی از یک نیم‌گروه مارکوفی است که یکی از کاربردهای آن را در ادامه می‌بینیم.

**گزاره ۶.۳.** *به ازای هر نیم‌گروه برگشت‌پذیر* $\{T_t : t \geq 0\}$ *و* $f \geq 0$ *داریم*

$$\mathrm{Ent}_\pi(T_t f) \leq e^{-4\alpha_1 t}\mathrm{Ent}_\pi(f).$$

*برهان.* با استفاده از $\mathbb{E}[T_t f] = \mathbb{E}f$ و نامساوی $1$-سوبولف لگاریتمی داریم

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Ent}_\pi(T_t f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}[T_t f \ln T_t f] = -\mathbb{E}[\mathcal{L}T_t f \ln T_t f]$$
$$= -\mathcal{E}(T_t f, \ln T_t f) \leq -4\alpha_1 \mathrm{Ent}_\pi(T_t f).$$

با تقسیم دو طرف به $\mathrm{Ent}_\pi(T_t f)$ و انتگرال گرفتن از نامساوی فوق، گزاره ثابت می‌شود.

□

این بخش را با اثبات «خاصیت تانسوری» ثابت‌های $q$-سوبولف لگاریتمی به پایان می‌رسانیم.

**قضیه ۷.۳.** *فرض کنید* $(\Omega_k, \pi_k)$ *برای* $k = 1, \ldots, n$ *فضاهای احتمال باشند و* $\mathcal{L}_k$ *یک مولد لیندبلاد روی فضای* $k$*-ام باشد.* $\alpha_q(\mathcal{L}_k)$ *را ثابت* $q$*-سوبولف لگاریتمی* $\mathcal{L}_k$ *بگیرید. فضای احتمال ضربی* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\pi})$ *را درنظر بگیرید که در آن* $\tilde{\Omega} = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ *و* $\tilde{\pi} = \pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_n$ *. قرار دهید* $\tilde{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_1 + \cdots \hat{\mathcal{L}}_n$ *که در آن* $\hat{\mathcal{L}}_k = I_1 \otimes \cdots I_{k-1} \otimes \mathcal{L}_k \otimes I_{k+1} \otimes \cdots I_n$ *. در این صورت* $\tilde{\mathcal{L}}$ *مولد نیم‌گروه مارکوف*

$$\tilde{T}_t = e^{-t\tilde{\mathcal{L}}} = e^{-t\mathcal{L}_1} \otimes \cdots \otimes e^{-t\mathcal{L}_n},$$

*است و داریم*

$$\alpha_q(\tilde{\mathcal{L}}) = \max_k \alpha_q(\mathcal{L}_k). \tag{۸.۳}$$

*برهان.* برای سادگی فرض کنید $n = 2$. در اینصورت برای تابع $f : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ داریم

$$\langle f, \tilde{\mathcal{L}} f\rangle_{\tilde{\pi}} = \langle f, \hat{\mathcal{L}}_1 f\rangle_{\tilde{\pi}} + \langle f, \hat{\mathcal{L}}_1 f\rangle_{\tilde{\pi}}.$$

از طرف دیگر با استفاده از محدب بودن تابع $s \mapsto s\ln s$ می‌توان نشان داد که تابع آنتروپی زیرجمعی است:

$$\mathrm{Ent}_{\pi_1\times\pi_2} f \leq \mathbb{E}_{\pi_1}\big[\mathrm{Ent}_{\pi_2}(f)\big] + \mathbb{E}_{\pi_2}\big[\mathrm{Ent}_{\pi_1}(f)\big].$$

با کنار هم قرار دادن این دو نامساوی، $\alpha_q(\tilde{\mathcal{L}}) \geq \max_k \alpha_q(\mathcal{L}_k)$ بدست می‌آید. جهت دیگر نامساوی با در نظر گرفتن $f$هایی که فقط تابع یک مؤلفه هستند، بدست می‌آید. در واقع اگر $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ به صورت $f(x_1, x_2) = g(x_1)$ تعریف شده باشد، آنگاه داریم $\langle f, \tilde{\mathcal{L}} f\rangle_{\tilde{\pi}} = \langle g, \mathcal{L}_1 g\rangle_{\pi_1}$ و $\mathrm{Ent}_{\pi_1\times\pi_2}(f) = \mathrm{Ent}_{\pi_1}(g)$. لذا با توجه به تعریف داریم

$$\max_k \alpha_q(\mathcal{L}_k) \geq \alpha_q(\mathcal{L}_1) \geq \alpha_q(\tilde{\mathcal{L}}).$$

□

## ۴. نیم‌گروه مارکوف متناظر با یک زنجیره مارکوف

در این بخش مثالی مهم از نیم‌گروه‌های مارکوف متناظر با زنجیره‌های مارکوف گسسته یا قدم‌زدن‌های تصادفی روی گراف‌ها بیان می‌کنیم. فرض کنید $K$ یک ماتریس تصادفی باشد به این معنی که درایه‌های $K$ نامنفی هستند و $K1 = 1$. برای مثال $K$ می‌تواند ماتریس تغییر وضعیت[۲۲] یک قدم‌زدن تصادفی روی یک گراف باشد. در اینصورت ماتریس تغییر وضعیت در مرحله $m$–ام قدم‌زدن برابر $K^m$ است، و نیم‌گروه گسسته $\{K^m : m \in \mathbb{N}\}$ تغییر وضعیت قدم‌زدن تصادفی در زمان‌های گسسته را توصیف می‌کند. برای تبدیل این نیم‌گروه گسسته به یک نیم‌گروه مارکوف پیوسته، باید زمان را به جای گسسته، پیوسته در نظر بگیریم و زمان‌های قدم‌ها را به جای اعداد صحیح، نقاطی تصادفی روی خط حقیقی بگیریم. به علاوه، برای این که خاصیت مارکوفی برقرار باشد، انتخاب زمان‌های قدم‌ها باید بدون حافظه باشد. برای این کار می‌توانیم فرض کنیم که زمان‌های قدم‌ها، نقاط یک فرآیند پواسون هستند. لذا فرض کنید $N_t$ یک فرآیند پواسون با نرخ $t$ باشد. تعریف کنید

$$T_t = \mathbb{E}[K^{N_t}],$$

که در آن امید ریاضی نسبت به متغیر تصادفی $N_t$ است. در این صورت می‌توان نشان داد

$$T_t = e^{-t}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}K^j.$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که $T_t = e^{-t\mathcal{L}}$ که در آن

$$\mathcal{L} = I - K.$$

با فرض این که $K$ نسبت به توزیع مانای $\pi$ برگشت‌پذیر باشد، مولد لیندبلاد $\mathcal{L}$ به عنوان نگاشتی روی فضای $L^2(\pi)$ خودالحاق خواهد بود.

فرم دیریشله متناظر با این مولد برابر است با

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(f,g) &= \langle f, (I-K)g\rangle_\pi \\
&= \sum_x \pi(x) f(x)\Big(g(x) - \sum_y K(x,y)g(y)\Big) \\
&= \sum_x \pi(x) f(x)\sum_y \Big(K(x,y)(g(x)-g(y))\Big) \\
&= \sum_{x,y} \pi(x)K(x,y)f(x)(g(x)-g(y)).
\end{aligned}$$

[۲۲] Transition matrix

که در خط سوم از $K1 = 1$ استفاده کرده‌ایم. همچنین با استفاده از خاصیت برگشت‌پذیری (۲.۲) داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(f,g) &= \sum_{x,y} \pi(y)K(y,x)f(x)(g(x)-g(y)) \\ &= \sum_{x,y} \pi(x)K(x,y)f(y)(g(y)-g(x)).\end{aligned}$$

بنابراین با در نظر گرفتن میانگین دو رابطه فوق داریم

$$\mathcal{E}(f,g) = \frac{1}{2}\sum_{x,y} K(x,y)\pi(x)(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)). \tag{۱.۴}$$

**مثال ۱.۴.** فرض کنید $K$ ماتریس تغییر وضعیت بدیهی باشد که در آن $K(x,y) = \pi(y)$. در این صورت داریم $Kf = \mathbb{E}f$ و $\mathcal{L} = I - K = I - \mathbb{E}$ همان مثالی است که در انتهای بخش ۲ به آن پرداختیم. در آنجا دیدیم که $T_t = e^{-t}I + (1-e^{-t})\mathbb{E}$ و $\mathcal{E}(f,f) = \mathrm{Var}f$ . به علاوه شکاف طیفی این مولد برابر است با $\lambda = 1$ . در [۵] نشان داده شده است

$$\alpha_2 = \frac{1-2\pi_{\min}}{\ln(\pi_{\min}^{-1}-1)},$$

که در آن

$$\pi_{\min} = \min_x \pi(x).$$

به طور خاص، اگر $\pi$ توزیع یکنواخت باشد آنگاه

$$\alpha_2 = \frac{1-\frac{2}{|\Omega|}}{\ln(|\Omega|-1)},$$

و اگر $|\Omega| = 2$ آنگاه $\alpha_2 = 1/2$. تقریب زدن $\alpha_1$ کار ساده‌تری است. با استفاده از محدب بودن تابع لگاریتم داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}_\pi(f) &= \mathbb{E}[f\ln f] - \mathbb{E}[f]\ln\mathbb{E}[f] \\ &\le \mathbb{E}[f\ln f] - \mathbb{E}[f]\mathbb{E}[\ln f] \\ &= \mathbb{E}[f(\ln f - \mathbb{E}\ln f)] \\ &= \mathcal{E}(f,\ln f).\end{aligned}$$

بنابراین $\alpha_1 \ge 1/4$.

**نتیجه ۲.۴.** *به ازای هر مولد $\mathcal{L}$ با شکاف طیفی $\lambda$ داریم*

$$\alpha_2 \ge \frac{(1-2\pi_{\min})\lambda}{\ln(\pi_{\min}^{-1}-1)}. \tag{۲.۴}$$

*برهان.* با استفاده از ثابت سوبولف لگاریتمی مثال ۱.۴ داریم

$$\frac{1-2\pi_{\min}}{\ln(\pi_{\min}^{-1}-1)}\operatorname{Ent}(f^2)\leq\langle f,(I-\mathbb{E})f\rangle_\pi=\operatorname{Var}f.$$

سپس با استفاده از نامساوی پوانکاره $\lambda\operatorname{Var}f\leq\mathcal{E}(f,f)$ نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.

□

**مثال ۳.۴.** فرض کنید $K$ ماتریس قدم‌زدن تصادفی روی یال‌های گراف کامل با $n$ رأس باشد. در این صورت $\pi$ توزیع یکنواخت است و اگر $n>3$ داریم [۵]

$$\alpha_2=\frac{n-2}{(n-1)\ln(n-1)},$$

و برای $n=2$ داریم $\alpha_2=1$. در واقع در این مثال حالت تساوی در نامساوی (۲.۴) رخ می‌دهد. کران‌های زیر روی $\alpha_1$ نیز برقرارند:

$$\frac{n}{4(n-1)}\leq\alpha_1\leq\Big(\frac{1}{4}+\frac{1}{\ln(n+1)}\Big)\frac{n}{n-1}.$$

**مثال ۴.۴.** $K$ را ماتریس قدم‌زدن تصادفی روی ابرمکعب $\Omega=\{+1,-1\}^n$ بگیرید که در آن $x,y\in\Omega$ مجاورند اگر آنها فقط در یک مؤلفه متفاوت باشند. توزیع مانای متناظر، توزیع یکنواخت است. قرار دهید

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

در این صورت با استفاده از نمادگذاری قضیه ۷.۳ داریم

$$K=\frac{1}{n}(\hat{A}_1+\cdots+\hat{A}_n).$$

در مثال قبل دیدیم $\alpha_2(I-A)=1$. در نتیجه

$$\alpha_2(I-K)=\frac{1}{n}\alpha_2(I-A)=\frac{1}{n}.$$

همچنین $\lambda=2/n$.

**مثال ۵.۴.** فرض کنید $\Omega=S_n$ گروه تقارنی روی یک مجموع $n$ عضوی باشد. $K$ را ماتریس قدم‌زدن تصادفی روی $S_n$ بگیرید که در آن برای دو جایگشت $\sigma,\sigma'\in S_n$ اگر $\sigma^{-1}\sigma'$ یک ترانهش[۲۳] باشد، آنگاه تعریف می‌کنیم $K(\sigma,\sigma')=2/(n(n-1))$ و در غیر این صورت قرار می‌دهیم $K(\sigma,\sigma')=0$. دوباره

[۲۳] Transposition

توزیع مانای متناظر، توزیع یکنواخت است. داریم $\lambda = 2/(n-1)$. همچنین در [۵] نشان داده شده است که

$$\frac{1}{3n\ln n} \le \alpha_2 \le \frac{1}{n-1}.$$

همچنین داریم:

$$\frac{1}{4(n-1)} \le \alpha_1 \le \frac{1}{n-1}.$$

## ۵. تقریب زمان آمیختگی

در این بخش به یکی از کاربردهای مهم نامساوی‌های سوبولف لگاریتمی می‌پردازیم. در گزاره ۲.۲ دیدیم که با فرض اولیه بودن $\mathcal{L}$، یعنی $\lambda > 0$، به ازای هر توزیع احتمال $\mu$، توزیع احتمال $\mu T_t$ هرگاه $t \to \infty$، به $\pi$ میل می‌کند. هدف ما در این بخش تقریب زدن سرعت این همگرایی است. برای این کار ابتدا پارامتر زمان آمیختگی را تعریف می‌کنیم:

$$\tau_{\text{mix}} := \min\{t : \ \|\mu T_t - \pi\|_{\text{TV}} \le \frac{1}{2e}, \ \forall \mu\}, \tag{۱.۵}$$

که در آن منظور از $\|\cdot\|_{\text{TV}}$ فاصله وردش کلی[۲۴] است:

$$\|\rho\|_{\text{TV}} = \frac{1}{2}\sum_x |\rho(x)| = \max_{\omega:\omega(x)\in\{\pm 1\}} \sum_x \omega(x)\cdot\rho(x).$$

در واقع $\tau_{\text{mix}}$ برابر کوچکترین زمان $t$ است که فاصله وردش کلی $\mu T_t$ با $\pi$ حداکثر $1/(2e)$ باشد. در اینجا انتخاب عدد $1/(2e)$ در تعریف این معیار دلخواه است. نکته در این است که می‌توان نشان داد که اگر بخواهیم به جای کران $1/(2e)$ کران دلخواه $\epsilon > 0$ را روی این فاصله بگیریم، کافی است قرار دهیم $t = \tau_{\text{mix}} \ln(1/\epsilon)$.

حال به مسأله تقریب $\tau_{\text{mix}}$ می‌پردازیم. با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز داریم

$$\begin{aligned}
\|\mu - \pi\|_{\text{TV}} &= \max_{\omega:\omega(x)\in\{\pm 1\}} \frac{1}{2}\sum_x \omega(x)\cdot(\mu(x)-\pi(x)) \\
&= \max_{\omega:\omega(x)\in\{\pm 1\}} \frac{1}{2}\sum_x \omega(x)\pi(x)^{1/2}\cdot(\mu(x)-\pi(x))\pi(x)^{-1/2} \\
&\le \max_{\omega:\omega(x)\in\{\pm 1\}} \frac{1}{2}\sqrt{\sum_x \omega(x)^2\pi(x)}\cdot\sqrt{\sum_x (\mu(x)-\pi(x))^2\pi(x)^{-1}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\sum_x (\mu(x)-\pi(x))^2\pi(x)^{-1}} \\
&= \frac{1}{2}\Big\|\frac{\mu}{\pi} - 1\Big\|_2,
\end{aligned}$$

---

[۲۴] Total variation distance

که در آن منظور از $\frac{\mu}{\pi}$ تابع $\frac{\mu}{\pi}(x) = \mu(x)/\pi(x)$ است. بنابراین

$$\|\mu T_t - \pi\|_{\mathrm{TV}} \leq \frac{1}{2}\Big\|\frac{\mu T_t}{\pi} - 1\Big\|_2.$$

حال با استفاده از (۳.۲) داریم $\frac{\mu T_t}{\pi} = T_t f,$ که در آن $f = \mu/\pi$. در نتیجه

$$\|\mu T_t - \pi\|_{\mathrm{TV}} \leq \frac{1}{2}\|T_t f - 1\|_2 = \frac{1}{2}\|T_t f - \mathbb{E}f\|_2.$$

پس با استفاده از گزاره ۲.۲ داریم

$$\|\mu T_t - \pi\|_{\mathrm{TV}} \leq \frac{1}{2}e^{-\lambda t}\|f - 1\|_2.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\max_{\mu}\|\mu T_t - \pi\|_{\mathrm{TV}} &\leq \frac{1}{2}e^{-\lambda t}\max_{f: f\geq 0, \mathbb{E}f=1}\|f-1\|_2 \\ &= \frac{1}{2}e^{-\lambda t}\sqrt{\pi_{\min}\Big(\frac{1}{\pi_{\min}} - 1\Big)^2} \\ &\leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi_{\min}}}e^{-\lambda t},\end{aligned}$$

که در آن $\pi_{\min} = \min_x \pi(x)$.

**قضیه ۱.۵.** *به ازای هر نیم‌گروه مارکوف برگشت‌پذیر داریم*

$$\tau_{\mathrm{mix}} \leq \frac{1}{\lambda}\Big(1 + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\pi_{\min}}\Big).$$

این قضیه روشی استاندارد برای تقریب زدن سرعت همگرایی فرآیندهای مارکوف بیان می‌کند. در ادامه نشان می‌دهیم قضیه فوق، که نتیجه‌ای از نامساوی پوانکاره است، ضعیف‌تر از کرانی است که به وسیله نامساوی سوبولف لگاریتمی بدست می‌آید.

**قضیه ۲.۵.** *به ازای هر نیم‌گروه مارکوف برگشت‌پذیر داریم*

$$\tau_{\mathrm{mix}} \leq \frac{1}{4\alpha_1}(\ln 2 + 2 + \ln\ln\frac{1}{\pi_{\min}}) \leq \frac{1}{4\alpha_2}(\ln 2 + 2 + \ln\ln\frac{1}{\pi_{\min}}).$$

برای اثبات این قضیه از نامساوی پینسکر[۲۵] به شرح زیر استفاده می‌کنیم

$$\|\mu - \pi\|_{\mathrm{TV}}^2 \leq \frac{1}{2}D(\mu\|\pi), \tag{۲.۵}$$

که در آن $D(\mu\|\pi)$ در (۲.۳) تعریف شده است. در واقع این نامساوی را به جای تقریب فاصله وردش کلی با 2-نرم که در اثبات قضیه ۱.۵ استفاده شد قرار خواهیم داد.

[۲۵] Pinsker's inequality

*برهان.* برای توزیع احتمال دلخواه $\mu$ قرار دهید $f_t = \frac{\mu T_t}{\pi}$. در این صورت داریم $f_t = T_t f_0$. همچنین با استفاده از نامساوی پینسکر داریم

$$\|\mu T_t - \pi\|_{\mathrm{TV}}^2 \leq \frac{1}{2} D(\mu T_t \| \pi) = \frac{1}{2} \operatorname{Ent}(f_t).$$

سپس با استفاده از گزاره ۶.۳ داریم

$$\operatorname{Ent}(f_t) \leq e^{-4\alpha_1 t} \operatorname{Ent}(f_0) = e^{-4\alpha_1 t} D(\mu \| \pi).$$

بنابراین با استفاده از محدب بودن $\mu \mapsto D(\mu\|\pi)$ داریم

$$\max_\mu \|\mu T_t - \pi\|_{\mathrm{TV}}^2 \leq \frac{1}{2} e^{-4\alpha_1 t} \max_\mu D(\mu \| \pi) = \frac{1}{2} e^{-4\alpha_1 t} \ln \frac{1}{\pi_{\min}}.$$

برای اثبات کران مورد نظر روی $\tau_{\mathrm{mix}}$ کافی است سمت راست را برابر $1/(2e)^2$ قرار دهیم.

□

حال با ارائه مثال‌هایی دو قضیه فوق را مقایسه می‌کنیم. ابتدا مثال قدم‌زدن تصادفی روی گراف ابرمکعب (مثال ۴.۴) را بررسی می‌کنیم. با توجه به این که $\lambda = 2/n$ و چون $\pi$ توزیع یکنواخت است، از قضیه ۱.۵ کران $\tau_{\mathrm{mix}} = O(n^2)$ را بدست می‌آوریم. از طرف دیگر با استفاده از قضیه ۲.۵ داریم $\tau_{\mathrm{mix}} = O(n \ln n)$ که کران قوی‌تری است. نکته در این است که در قضیه ۲.۵ $\ln \ln(1/\pi_{\min})$ جایگزین $\ln(1/\pi_{\min})$ شده است.

حال مثال ۵.۴ را در نظر بگیرید. با استفاده از قضیه ۱.۵ کران $\tau_{\mathrm{mix}} = O(n^2 \ln n)$ را بدست می‌آوریم، در حالی که قضیه ۲.۵ کران قوی‌تر $\tau_{\mathrm{mix}} = O(n \ln n)$ را نتیجه می‌دهد.

## ۶. نیم‌گروه اورنشتاین–اولنبک

در بخش‌های گذشته ما فقط به نیم‌گروه‌های روی مجموعه‌های گسسته متناهی پرداختیم. در این بخش به مثال مهمی از یک نیم‌گروه روی یک فضای پیوسته می‌پردازیم. توجه کنید که همه گزاره‌هایی را که تاکنون اثبات شده‌اند را می‌توان به فضاهای پیوسته نیز تعمیم داد. لذا ما بدون اشاره به جزئیات، به تعریف و بررسی خواص نیم‌گروه اورنشتاین–اولنبک[۲۶] می‌پردازیم.

یادآوری می‌کنیم که توزیع نرمال یا گاوسی $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ روی $\mathbb{R}$ با متوسط $a$ و واریانس $\sigma^2$ برابر است با

$$\mathrm{d}\nu = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x.$$

[۲۶] Ornstein-Uhlenbeck semigroup

یعنی برای هر تابع اندازه‌پذیر $f$ داریم

$$\mathbb{E}_\nu[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x.$$

اهمیت توزیع گاوسی در قضیه حد مرکزی است.

**قضیه ۱.۶.** (قضیه حد مرکزی) *فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان باشند که $\mathbb{E}[X_i] = a$ و $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2$ . در این صورت*

$$S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n - na}{\sqrt{n}}$$

*هرگاه $n \to \infty$ به توزیع $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ میل می‌کند. به این معنی که*

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[S_n \leq s] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{s} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x.$$

حال برای تابع به اندازه کافی خوش رفتار $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تعریف کنید

$$\mathcal{L}f(x) := xf'(x) - f''(x).$$

در ادامه نشان می‌دهیم که $\mathcal{L}$ یک مولد لیندبلاد است و نیم‌گروه مارکوف متناظر آن را محاسبه می‌کنیم. توزیع احتمال مانای $\pi$ متناظر با این مولد همان توزیع نرمال استاندارد $\pi = \mathcal{N}(0,1)$ است. یعنی برای هر دو تابع حقیقی $f, g$ داریم

$$\langle f, g\rangle_\pi = \mathbb{E}[fg] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x.$$

**لم ۲.۶.** (آ) $\mathcal{L}1 = 0$.

(ب) $\mathbb{E}[\mathcal{L}f] = \mathbb{E}[xf' - f''] = 0$.

(ج) $\langle f, \mathcal{L}g\rangle_\pi = \mathbb{E}[f'g'] = \langle \mathcal{L}f, g\rangle_\pi$.

توجه کنید که طبق (ب) نگاشت $\mathcal{L}$ نسبت به توزیع $\pi$ برگشت‌پذیر است.

*برهان.* (آ) از تعریف واضح است. همچنین (ب) از (ج) و (آ) بدست می‌آید:

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}f] = \langle 1, \mathcal{L}f\rangle_\pi = \langle \mathcal{L}1, f\rangle_\pi = \langle 0, f\rangle_\pi = 0.$$

برای اثبات (ج) از انتگرال جزء به جزء استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned}\langle f, \mathcal{L}g\rangle_\pi &= \langle f, xg' - g''\rangle_\pi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\big(xg'(x) - g''(x)\big)e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\Big(g'(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\Big)'\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g'(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x \\ &= \mathbb{E}[f'g'].\end{aligned}$$

□

حال نیم‌گروه مارکوف متناظر با مولد $\mathcal{L}$ را محاسبه می‌کنیم. تعریف کنید

$$T_tf(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f\big(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\,y\big)e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y. \tag{۱.۶}$$

توجه کنید که $T_tf(x)$ را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$T_tf(x) = \mathbb{E}_Y\Big[f\big(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\,Y\big)\Big],$$

که در آن $Y$ یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد است. در گزاره زیر نشان می‌دهیم که $\{T_t : t \geq 0\}$ یک نیم‌گروه مارکوف با مولد $\mathcal{L}$ است. به این نیم‌گروه مارکوف، نیم‌گروه اورنشتاین–اولنبک گویند.

**گزاره ۳.۶.** (آ) $T_tf \geq 0$ اگر $f \geq 0$ ، و $T_t1 = 1$.

(ب) $\lim_{t\to 0^+} T_tf(x) = f(x)$ و $\lim_{t\to\infty} T_tf(x) = \mathbb{E}[f]$ *به ازای هر تابع پیوسته و کراندار* $f$.

(ج) $T_tT_s = T_{s+t}$.

(د) $T_t\mathcal{L} = \mathcal{L}T_t$

(ه) *داریم*

$$\frac{\partial}{\partial t}T_tf(x) = -\mathcal{L}T_tf(x),$$

*و در نتیجه* $\mathbb{E}[T_tf] = \mathbb{E}[f]$.

*برهان.* (آ) واضح است و اثبات (ب) را به خواننده واگذار می‌گنیم. برای اثبات (ج) داریم

$$\begin{aligned}T_tT_sf(x) &= \mathbb{E}_Y\Big[T_sf\big(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}\,Y\big)\Big]\\ &= \mathbb{E}_Y\mathbb{E}_Z\Big[f\Big(e^{-s}\big(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}\,Y\big)+\sqrt{1-e^{-2s}}Z\Big)\Big]\\ &= \mathbb{E}_Y\mathbb{E}_Z\Big[f\Big(e^{-(s+t)}x+e^{-s}\sqrt{1-e^{-2t}}Y+\sqrt{1-e^{-2s}}Z\Big)\Big],\end{aligned}$$

که در آن $Y, Z$ متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد مستقل هستند. حال توجه کنید که ترکیب خطی متغیرهای تصادفی گاوسی، گاوسی است[۲۷] . در نتیجه $e^{-s}\sqrt{1-e^{-2t}}Y+\sqrt{1-e^{-2s}}Z$ یک متغیر تصادفی گاوسی با توزیع $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ است که در آن

$$\sigma^2 = e^{-2s}(1-e^{-2t})+(1-e^{-2s}) = 1-e^{-2(s+t)}.$$

بنابراین برای توزیع نرمال استاندارد $U$ داریم

$$T_tT_sf(x) = \mathbb{E}_U\Big[f\big(e^{-(s+t)}x+\sqrt{1-e^{-2(s+t)}}\,U\big)\Big] = T_{s+t}f(x).$$

برای اثبات (د) قرار دهید $g(y) := f(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}\,y)$. با توجه به این که نشان داده شد $\mathbb{E}[\mathcal{L}g]=0$، داریم

$$\begin{aligned}T_t\mathcal{L}f(x) &= \mathbb{E}_Y\Big[\mathcal{L}f\big(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}\,Y\big)\Big]\\ &= \mathbb{E}_Y\Big[\big(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}\,Y\big)f'\big(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}\,Y\big)-f''\big(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}\,Y\big)\Big]\\ &= e^{-t}x\mathbb{E}_Y\big[f'\big(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}\,Y\big)\big]-e^{-2t}\mathbb{E}\big[f''\big(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}\,Y\big)\big]\\ &\qquad+\mathbb{E}_Y[Yg'(Y)-g''(Y)]\\ &= e^{-t}x\mathbb{E}_Y\big[f'\big(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}\,Y\big)\big]-e^{-2t}\mathbb{E}_Y\big[f''\big(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}\,Y\big)\big] \qquad (۲.۶)\\ &= x\frac{\partial}{\partial x}\mathbb{E}_Y\big[f\big(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}\,Y\big)\big]-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathbb{E}_Y\big[f\big(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}\,Y\big)\big]\\ &= x\frac{\partial}{\partial x}T_tf(x)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}T_tf(x)\\ &= \mathcal{L}T_tf(x).\end{aligned}$$

[۲۷] این ادعا را می‌توان با محاسبه مستقیم و یا با استفاده از نسخه تعمیم یافته‌ای از قضیه حد مرکزی اثبات کرد [۶].

برای اثبات (ه) دوباره از تعریف تابع $g$ و تساوی $\mathbb{E}_Y[Yg'(Y)] = \mathbb{E}_Y[g''(Y)]$ که نتیجه $\mathbb{E}[\mathcal{L}g] = 0$ است استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} T_t f(x) &= \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{E}_Y\big[f\big(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\,Y\big)\big] \\
&= \mathbb{E}_Y\Big[\big(-e^{-t}x + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}\,Y\big) f'\big(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\,Y\big)\Big] \\
&= -e^{-t}x\mathbb{E}_Y\big[f'\big(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\,Y\big)\big] + \frac{e^{-2t}}{1-e^{-2t}}\mathbb{E}_Y[Yg'(Y)] \\
&= -e^{-t}x\mathbb{E}_Y\big[f'\big(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\,Y\big)\big] + \frac{e^{-2t}}{1-e^{-2t}}\mathbb{E}_Y[g''(Y)] \\
&= -e^{-t}x\mathbb{E}_Y\big[f'\big(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\,Y\big)\big] + e^{-2t}\mathbb{E}_Y[f''\big(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\,Y\big)] \\
&= -\mathcal{L}T_t f(x),
\end{aligned}$$

که در مرحله آخر از رابطه (۲.۶) استفاده کردیم.

□

حال به تقریب ثابت سوبولف لگاریتمی این نیم‌گروه مارکوف می‌پردازیم.

**قضیه ۴.۶.** *$\mathcal{L}f = xf' - f''$ را مولد نیم‌گروه اورنشتاین-اولنبک بگیرید. در این صورت داریم*

$$\alpha_2(\mathcal{L}) \geq \frac{1}{2}.$$

*به طور معادل برای هر تابع $f$ داریم:*

$$\mathrm{Ent}_\pi(f^2) \leq 2\langle f, \mathcal{L}f\rangle_\pi = 2\mathbb{E}[f'^2] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x. \qquad (۳.۶)$$

*برهان.* برای این قضیه دو اثبات ارائه می‌کنیم.

*اثبات اول:* برای تابع هموار و کراندار $g$ داریم $T_0 g = g$ و $\lim_{t\to\infty} T_t g = \mathbb{E}[g]$. بنابراین برای $g = f^2$ داریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}_\pi(f^2) &= \mathbb{E}[g\ln g] - \mathbb{E}[g]\ln\mathbb{E}[g] \\
&= -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}\big[T_t g\cdot \ln T_t g\big]\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^\infty -\mathbb{E}\big[\mathcal{L}T_t g\cdot \ln T_t g - \mathcal{L}T_t(g)\big]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}\big[\mathcal{L}T_t g\cdot \ln T_t g\big]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \langle \mathcal{L}T_t g, \ln T_t g\rangle\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}\big[(T_t g)'\cdot(\ln T_t g)'\big]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}\Big[\frac{(T_t g)'^2}{T_t g}\Big]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$T_t g(x) = \mathbb{E}_Y\big[g(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\,Y)\big].$$

در نتیجه با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز داریم

$$\begin{aligned}
(T_t g)'(x) &= e^{-t}\mathbb{E}_Y\big[g'(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\,Y)\big] \\
&= 2e^{-t}\mathbb{E}_Y\big[f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\,Y)f'(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\,Y)\big] \\
&\le 2e^{-t}\Big(\mathbb{E}_Y\big[f^2(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\,Y)\big]\mathbb{E}_Y\big[f'^2(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\,Y)\big]\Big)^{1/2} \\
&= 2e^{-t}\Big(T_t g(x) T_t(f'^2)(x)\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

پس

$$\frac{(T_t g)'(x)^2}{T_t g(x)} \le 4e^{-2t}T_t(f'^2)(x),$$

و

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}_\pi(f^2) &\le \int_0^\infty 4e^{-2t}\mathbb{E}\big[T_t(f'^2)\big]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty 4e^{-2t}\mathbb{E}\big[f'^2\big]\mathrm{d}t \\
&= 2\mathbb{E}\big[f'^2\big].
\end{aligned}$$

*اثبات دوم:* توجه کنید که طبق مثال ۱.۴، تقریب ارائه شده برای $\alpha_2$ در این قضیه برابر است با ثابت 2−سوبولف لگاریتمی مولد $I-\mathbb{E}$ متناظر با توزیع یکنواخت روی مجموعه $\Omega=\{+1,-1\}$. این نکته به همراه قضیه حد مرکزی، اثباتی دیگر از قضیه بدست می‌دهند.

با استفاده از خاصیت تانسوری نامساوی سوبولف لگاریتمی که در قضیه ۷.۳ به آن پرداختیم و رابطه (۱.۴)، برای هر تابع $g:\{+1,-1\}^n\to\mathbb{R}$ داریم

$$\mathrm{Ent}(g^2)\le\frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{n}\big(g(x_1,\dots,x_n)-g(x_1,\dots,-x_i,\dots,x_n)\big)^2\Big].\qquad(۴.۶)$$

فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابع به اندازه کافی خوش‌رفتاری باشد و قرار دهید

$$g_n(x_1,\dots,x_n):=f\big(\frac{x_1+\cdots+x_n}{\sqrt{n}}\big).$$

طبق قضیه حد مرکزی توزیع $\frac{x_1+\cdots+x_n}{\sqrt{n}}$ وقتی $(x_1,\dots,x_n)$ به طور یکنواخت از $\{+1,-1\}^n$ انتخاب می‌شود، به توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند. بنابراین $\mathrm{Ent}(g_n^2)$ هرگاه $n\to\infty$ به $\mathrm{Ent}_\pi(f^2)$ میل می‌کند. از طرف دیگر به ازای هر $1\le i\le n$ داریم

$$\begin{aligned}g_n(x_1,\dots,x_n)-g_n(x_1,\dots,-x_i,\dots,x_n)&\\&=f\big(\frac{x_1+\cdots+x_n}{\sqrt{n}}\big)-f\big(\frac{x_1+\cdots+x_n-2x_i}{\sqrt{n}}\big)\\&=\frac{2x_i}{\sqrt{n}}f'\big(\frac{x_1+\cdots+x_n}{\sqrt{n}}\big)+O\Big(\Big|\frac{2x_i}{\sqrt{n}}\Big|^2\Big)\\&=\frac{2x_i}{\sqrt{n}}f'\big(\frac{x_1+\cdots+x_n}{\sqrt{n}}\big)+O\Big(\frac{1}{n}\Big).\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\big(g(x_1,\dots,x_n)-g(x_1,\dots,-x_i,\dots,x_n)\big)^2=\frac{4}{n}f'^2\big(\frac{x_1+\cdots+x_n}{\sqrt{n}}\big)+O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big),$$

و

$$\sum_{i=1}^{n}\big(g(x_1,\dots,x_n)-g(x_1,\dots,-x_i,\dots,x_n)\big)^2=4f'^2\big(\frac{x_1+\cdots+x_n}{\sqrt{n}}\big)+O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big).$$

حال دوباره با استفاده از قضیه حد مرکزی،

$$\mathbb{E}\Big[f'^2\big(\frac{x_1+\cdots+x_n}{\sqrt{n}}\big)\Big]$$

هرگاه $n\to\infty$ به $\mathbb{E}[f'^2]$ میل می‌کند. با استفاده از این دو تساوی در (۴.۶) اثبات قضیه به اتمام می‌رسد.

□

در اثبات‌های فوق برای سادگی فرض کردیم که توابع $f, g$ هموار و کراندار هستند. با این حال قضیه فوق برای توابع لیپ‌شیتز نیز برقرار است. کافی است که در این قضیه به جای $f'(x)$ قرار دهیم

$$f'(x) := \limsup_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

## ۷. مطالعات تکمیلی

همان‌طور که قبلاً هم ذکر شد، نامساوی‌های ابرانقباضی و سوبولف لگاریتمی کاربردهای زیادی دارند که در این مقاله مجالی برای پرداختن به همه آنها نیست. لذا در بخش آخر به اشاراتی به بعضی از این مباحث اکتفا می‌کنیم.

اول این که نامساوی‌های ابرانقباضی معکوس[۲۸] که متناظر با مقادیر $p, q < 1$ هستند نیز مورد مطالعه قرار می‌گیرند. نکته در این است که به ازای هر ماتریس تصادفی $T$، عدد $p < 1$ و تابع مثبت $f > 0$ داریم

$$\|Tf\|_p \geq \|f\|_p,$$

که در آن $\|\cdot\|_p$ همانند قبل تعریف می‌شود.[۲۹] به این نامساوی، نامساوی انقباضی معکوس گویند. حال می‌توان مانند قبل در مورد نامساوی‌های قوی‌تری از این نامساوی تحقیق کرد. دوباره با فرض اینکه $T$ متعلق به یک نیم‌گروه مارکوف است، نامساوی‌های ابرانقباضی معکوس را می‌توان با استفاده از نامساوی‌های سوبولف لگاریتمی اثبات کرد. برای مطالعه در این زمینه به [۸] ارجاع می‌دهیم.

مثال ۱.۴ در عین سادگی، یکی از مهم‌ترین مثال‌های مولدهای لیندبلاد است که کاربردهای زیادی دارد. فرض کنید $\Omega = \{+1, -1\}$ و $\pi$ توزیع یکنواخت است. حال با استفاده از خاصیت تانسوری می‌توان نیم‌گروه مارکوف القایی که روی توابع بولی $f : \{+1, -1\}^n \to \mathbb{R}$ عمل می‌کند و نامساوی‌های متناظر با آن‌ها را مطالعه کرد. به طور خاص دیدیم که این نگاه اثباتی از قضیه ۳.۶ بدست می‌دهد. به طور کلی‌تر، از آنجا که توابع $f : \{+1, -1\}^n \to \mathbb{R}$ در ترکیبیات و علوم کامپیوتر نظری به طور طبیعی ظاهر می‌شوند، این نامساوی‌ها کاربردهای زیادی پیدا کرده و در آنالیز توابع بولی ظاهر می‌شوند. برای مطالعه بیشتر در این زمینه به [۴] ارجاع می‌دهیم.

یکی از مهم‌ترین کاربردهای نامساوی‌های سوبولف لگاریتمی در اثبات نامساوی‌های تجمع اندازه است. نامساوی‌های تجمع اندازه خود نیز نتیجه‌ای از نامساوی‌های هزینه ترابری (نامساوی های تالاگرند[۳۰]) هستند. حال نکته در این است که نامساوی‌های سوبولف لگاریتمی قوی‌تر از نامساوی‌های هزینه ترابری هستند و آنها را نتیجه می‌دهند. برای آشنایی با این مباحث به [۷] ارجاع می‌دهیم.

---

[۲۸] Reverse hypercontractivity

[۲۹] تأکید می‌کنیم که $\|\cdot\|_p$ برای $p < 1$ در نامساوی مثلث صدق نمی‌کند.

[۳۰] Talagrand's inequality

نامساوی‌های سوبولف لگاریتمی همچنین مرتبط با نامساوی‌های هم‌محیطی هستند. البته نامساوی‌های هم‌محیطی قوی‌تر از نامساوی‌های سوبولف لگاریتمی هستند. به طور خاص می‌توان قضیه ۳.۶ را با استفاده از یک نامساوی هم‌محیطی اثبات کرد. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به [۲، ۹] ارجاع می‌دهیم.

قضیه ۳.۶ از چند وجه قابل تعمیم است. نکته اول اینکه با استفاده از خاصیت تانسوری می‌توان این قضیه را برای مولد $\mathcal{L} = \mathbf{x}\cdot\nabla - \Delta$ که در آن $\nabla$ عملگر گرادیان و $\Delta$ عملگر لاپلاس روی $\mathbb{R}^n$ است، نیز تعمیم داد. توجه کنید که این عملگر روی فضای توابع $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ عمل می‌کند و توزیع مانای متناظر با آن توزیع گاوسی $n$–بعدی است. نکته دوم این که فرض کنید توزیع $\pi$ به فرم

$$\mathrm{d}\pi = e^{-V}\mathrm{d}\mathbf{x},$$

است که در آن $V(\mathbf{x})$ تابعی محدب است. مولد لیندبلاد متناظر با این توزیع احتمال برابر است با

$$\mathcal{L} = \nabla V\cdot\nabla - \Delta.$$

حال قضیه مهم بکری–امری[۳۱] بیان می‌کند که اگر برای ثابت مثبت $c$، ماتریس $\mathrm{Hess}(V)-cI$ مثبت نیمه معین باشد که در آن $\mathrm{Hess}(V)$ ماتریس هسیان[۳۲] تابع $V$ است و $I$ ماتریس همانی است، آنگاه $\alpha_2(\mathcal{L})\geq c/2$. توجه کنید که این تعمیمی از قضیه ۳.۶ است. نکته سوم این که قضیه بکری–امری به فضاهای خمیده نیز قابل تعمیم است که در آن صورت، انحنای فضا نیز در تقریب $\alpha_2$ ظاهر می‌شود. برای مطالعات بیشتر در این زمینه به [۲، ۹] ارجاع می‌دهیم.

در انتها برای کاربردی از نامساوی‌های ابرانقباضی در نظریه احتمال و نظریه اطلاعات به [۱، ۲] مراجعه کنید.

---

[۳۱] Bakry-Emery criterion

[۳۲] ماتریس هسیان ماتریسی $n\times n$ است و درایه $(i,j)$ آن برابر $\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}V$ است.

# مراجع

[1] R. Ahlswede and P. Gács, *Spreading of sets in product spaces and hypercontraction of the Markov operator*, Ann. Probability **4** (1976) 925–939.

[2] S. Beigi, *Hypercontractivity and logarithmic Sobolev inequalities and their applications*, available at http://math.ipm.ir/~beigi/files/HCLS.pdf

[3] E.B. Davies, L. Gross and B. Simon, *Hypercontractivity: A bibliographic review,* In: Ideas and Methods in Quantum and Statistical Physics, pp. 370–389, Cambridge University Press, New York, 1992.

[4] R. de Wolf, *A brief introduction to Fourier analysis on the Boolean cube*, Theory of Computing Library, Graduate Surveys **1** (2008) 1–20.

[5] P. Diaconis and L. Saloff-Coste, *Logarithmic Sobolev inequalities for finite Markov chains*, Ann. Appl. Probab. **6** (1996), no. 3, 695–750.

[6] S. Ghahramani, *Fundamentals of Probability: With Stochastic Processes*, CRC Press , Boca Raton, FL, 2018.

[7] M. Ledoux, *Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities*, In: Séminaire de Probabilités de Strasbourg 33, pp. 120–216, Lecture Notes in Math. 1709, Springer, Berlin, 1999.

[8] E. Mossel, K. Oleszkiewicz and A. Sen, *On Reverse Hypercontractivity, Geom. Funct. Anal.* **23** (2013) 1062-1097 .

[9] C. Villani, *Topics in Optimal Transportation,* Graduate Studies in Mathematics 58, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.